第 2 节 复合函数不等式问题（★★★）

内容提要

含有 $f(f(x))$，$f(g(x))$ 这类结构的不等式称为复合函数不等式，类似于上一节，复合函数不等式问题依然首选换元法求解，将内层的函数整体换元成 t，将一个双层的不等式问题化归成两个单层的不等式问题来处理.

典型例题

【例题】设函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x|,x\le 1\\ x^2-4x+3,x>1\end{cases}$，若 $f(f(x))\ge 0$，则实数 x 的取值范围为（　　）

（A）$[-2,2]$　　（B）$[-2,2+\sqrt{2}]\cup[4,+\infty)$　　（C）$[-2,2+\sqrt{2}]$　　（D）$[-2,2]\cup[4,+\infty)$

解析： 看到复合结构的不等式 $f(f(x))\ge 0$，想到将内层的 $f(x)$ 换元成 t，化整为零，

设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))\ge 0$ 即为 $f(t)\ge 0$，函数 $y=f(t)$ 的图象好画，故直接画图来看 $f(t)\ge 0$ 的解，

函数 $y=f(t)$ 的大致图象如图 1，由图可知 $f(t)\ge 0\Leftrightarrow -1\le t\le 1$ 或 $t\ge 3$，所以 $-1\le f(x)\le 1$ 或 $f(x)\ge 3$，

函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图 2，要求解上面的两个不等式，先求出 $y=1$ 和 $y=3$ 与该图象交点的横坐标，

$\begin{cases}y=1\\ y=x^2-4x+3\end{cases}\Rightarrow x=2+\sqrt{2}$ 或 $2-\sqrt{2}$，$\begin{cases}y=3\\ y=x^2-4x+3\end{cases}\Rightarrow x=4$ 或 0，

由图可知直线 $y=1$ 和 $y=3$ 与 $y=f(x)$ 的图象的交点的横坐标分别为 $2+\sqrt{2}$ 和 4，

所以不等式 $-1\le f(x)\le 1$ 的解为 $-2\le x\le 2+\sqrt{2}$，不等式 $f(x)\ge 3$ 的解集为 $x\ge 4$，

故实数 x 的取值范围为 $[-2,2+\sqrt{2}]\cup[4,+\infty)$.

答案： B

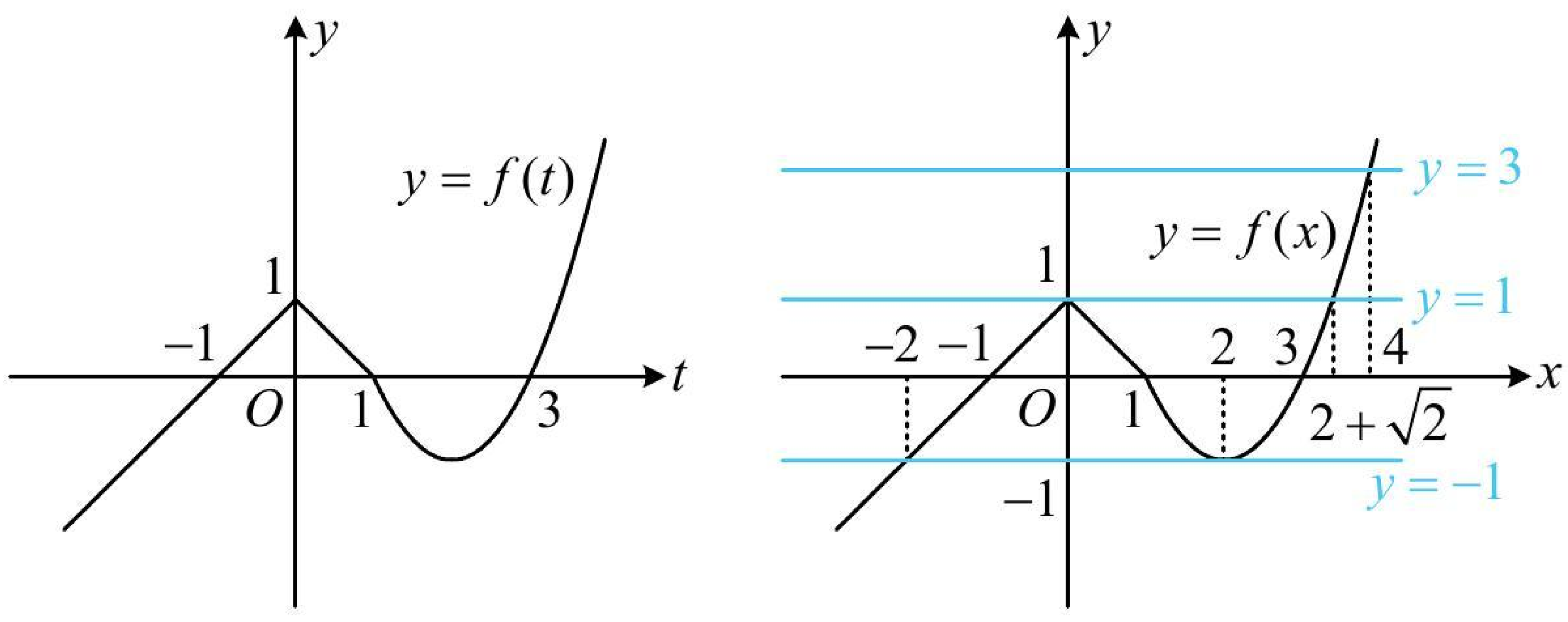


图1　　图2

【变式】设函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x|,x\le 1\\ x^2-4x+3,x>1\end{cases}$，$g(x)=4^x-a\cdot 2^x+4(a\in\mathbf{R})$，若 $f(g(x))\ge 3$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围为_____.

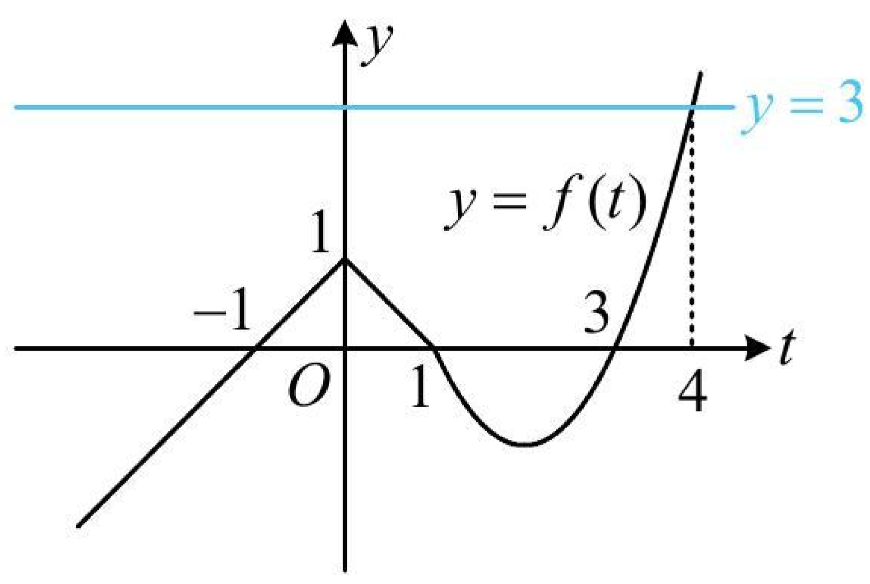
解析： 看到复合结构 $f(g(x))$，先将内层的 $g(x)$ 换元，设 $t=g(x)$，则 $f(g(x))\ge 3$ 即为 $f(t)\ge 3$，

直线 $y=3$ 和函数 $y=f(t)$ 的图象如图，$\begin{cases}y=3\\ y=t^2-4t+3\end{cases}\Rightarrow t=4$ 或 0，由图可知 $f(t)\ge 3\Leftrightarrow t\ge 4$，

所以问题等价于 $g(x) \geq 4$ 恒成立，即 $4^x - a \cdot 2^x + 4 \geq 4$，化简得：$2^x - a \geq 0$，故 $a \leq 2^x$ 恒成立，

因为 $2^x \in (0, +\infty)$，所以 $a \leq 0$.

答案： $(-\infty, 0]$



【反思】处理复合结构的不等式，关键技巧是将内层换元，转化为两个简单结构的不等式求解.

强化训练

1.（★★）已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, x < 1 \\ x^3 + x, x \geq 1 \end{cases}$，则不等式 $f(f(x)) < 2$ 的解集为_____.

2.（★★★）设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 3, x > 1 \end{cases}$，则不等式 $f(f(x)) - f(x) + 1 \leq 0$ 的解集为_____.

3.（★★★）设 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, x < 1 \\ x^3 + x - 1, x \geq 1 \end{cases}$，$g(x) = e^x - a(x+1) + 1$，若 $f(g(x)) \geq 1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为_____.